2) a) pour $n=0$ $\quad 0 \leqslant u_0 = 1 \leqslant 4$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ et

montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

On a $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 4$

et g est croissante sur $[0,4]$

$\Rightarrow \quad g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(4)$

$\Rightarrow \quad f(0)+0 \leqslant u_{n+1} \leqslant f(4)+4$

$\Rightarrow \quad 0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

$\Rightarrow \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4}$

2) b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

$= f(u_n) + u_n - u_n = f(u_n) \geqslant 0$

car $u_n \in [0,4]$